Ordres linéaires définissables dans des structures o-minimales

Janak Ramakrishnan

Université Claude Bernard Lyon I
Institut Camille Jordan

7 Juin 2010

Séminaire Général de Logique, Université Paris VII
http://math.univ-lyon1.fr/~janak/talks/paris.pdf

Prélude

- La définition: une structure o-minimale est une structure ordonnée M telle que chaque partie définissable de M^1 est réunion d'un nombre fini de points et d'intervalles.
- Pour les structures o-minimales, il existe un théorème de décomposition cellulaire, qui nous permet de répartir les ensembles définissables en un nombre fini de morceaux tels que chaque morceau a les propriétés définissables que nous désirons.
- Suite à ce théorème, on a aussi finitude uniforme – pour chaque famille définissable d'ensembles finis, il existe une borne finie sur la cardinalité des ensembles de la famille.

Prélude

- La définition: une structure o-minimale est une structure ordonnée M telle que chaque partie définissable de M^1 est réunion d'un nombre fini de points et d'intervalles.
- Pour les structures o-minimales, il existe un théorème de décomposition cellulaire, qui nous permet de répartir les ensembles définissables en un nombre fini de morceaux tels que chaque morceau a les propriétés définissables que nous désirons.
- Suite à ce théorème, on a aussi finitude uniforme – pour chaque famille définissable d'ensembles finis, il existe une borne finie sur la cardinalité des ensembles de la famille.

Prélude

- La définition: une structure o-minimale est une structure ordonnée M telle que chaque partie définissable de M^1 est réunion d'un nombre fini de points et d'intervalles.
- Pour les structures o-minimales, il existe un théorème de décomposition cellulaire, qui nous permet de répartir les ensembles définissables en un nombre fini de morceaux tels que chaque morceau a les propriétés définissables que nous désirons.
- Suite à ce théorème, on a aussi finitude uniforme – pour chaque famille définissable d'ensembles finis, il existe une borne finie sur la cardinalité des ensembles de la famille.

Question

- Soit M un groupe o-minimal. Soit $(P, \prec)$ un ordre linéaire, total et M-définissable. Que pouvons-nous dire de P?
- Les ordres linéaires définissables les plus simples sont les ordres lexicographiques sur M^n. (Nous utilisons $<_{\text{lex}}$ pour noter l'ordre lexicographique.)
- Clairement, un ordre linéaire définissable peut être un sous-ensemble définissable d'un tel ordre lexicographique, ou l'image par une injection définissable d'un tel sous-ensemble.
- Théorème: C'est tout.

Question

- Soit M un groupe o-minimal. Soit $(P, \prec)$ un ordre linéaire, total et M-définissable. Que pouvons-nous dire de P?
- Les ordres linéaires définissables les plus simples sont les ordres lexicographiques sur M^n. (Nous utilisons $<_{\text{lex}}$ pour noter l'ordre lexicographique.)
- Clairement, un ordre linéaire définissable peut être un sous-ensemble définissable d'un tel ordre lexicographique, ou l'image par une injection définissable d'un tel sous-ensemble.
- Théorème: C'est tout.

Question

- Soit M un groupe o-minimal. Soit $(P, \prec)$ un ordre linéaire, total et M-définissable. Que pouvons-nous dire de P?
- Les ordres linéaires définissables les plus simples sont les ordres lexicographiques sur M^n. (Nous utilisons $<_{\text{lex}}$ pour noter l'ordre lexicographique.)
- Clairement, un ordre linéaire définissable peut être un sous-ensemble définissable d'un tel ordre lexicographique, ou l'image par une injection définissable d'un tel sous-ensemble.
- Théorème: C'est tout.

Question

- Soit M un groupe o-minimal. Soit $(P, \prec)$ un ordre linéaire, total et M-définissable. Que pouvons-nous dire de P?
- Les ordres linéaires définissables les plus simples sont les ordres lexicographiques sur M^n. (Nous utilisons $<_{\text{lex}}$ pour noter l'ordre lexicographique.)
- Clairement, un ordre linéaire définissable peut être un sous-ensemble définissable d'un tel ordre lexicographique, ou l'image par une injection définissable d'un tel sous-ensemble.
- Théorème: C'est tout.

Réponse

Théorème A

Soit M un groupe o-minimal, soit $(P, \prec)$ un ordre linéaire M-définissable, soit $n = \dim(P)$. Alors il existe une injection, $g : P \to M^{n+2}$, définissable avec les même paramètres que P, telle que g est un plongement de $(P, \prec)$ dans $(M^{n+2}, <_{lex})$, et les projections de $g(P)$ sur les première et dernière coordonnées sont finies.

Remarque

En fait, nous n'avons besoin que de: M élimine les imaginaires et possède une bijection définissable qui renverse l'ordre.

Réponse

Théorème A

Soit M un groupe o-minimal, soit $(P, \prec)$ un ordre linéaire M-définissable, soit $n = \dim(P)$. Alors il existe une injection, $g : P \to M^{n+2}$, définissable avec les même paramètres que P, telle que g est un plongement de $(P, \prec)$ dans $(M^{n+2}, <_{lex})$, et les projections de $g(P)$ sur les première et dernière coordonnées sont finies.

Remarque

En fait, nous n'avons besoin que de: M élimine les imaginaires et possède une bijection définissable qui renverse l'ordre.

Anciens Résultats

- Steinhorn a un résultat non-publié qui implique le Théorème A dans le cas où $\dim(P) = 1$.
- Steinhorn et Onshuus ont récemment démontré qu'on peut répartir un ordre linéaire en un nombre fini de morceaux définissables, et pour chaque morceau, considéré comme ordre linéaire lui-même, le Théorème A est vrai.
- Pourtant, leur résultat ne dit pas comment l'ordre compare les éléments dans deux morceaux différents. Il ne permet donc pas de réduire l'étude d'ordres linéaires définissables à l'étude de sous-ensembles définissables d'ordres lexicographiques.
- Ils ont aussi noté que ce sujet a des liens avec l'économie, que nous allons voir bientôt.

Anciens Résultats

- Steinhorn a un résultat non-publié qui implique le Théorème A dans le cas où $\dim(P) = 1$.
- Steinhorn et Onshuus ont récemment démontré qu'on peut répartir un ordre linéaire en un nombre fini de morceaux définissables, et pour chaque morceau, considéré comme ordre linéaire lui-même, le Théorème A est vrai.
- Pourtant, leur résultat ne dit pas comment l'ordre compare les éléments dans deux morceaux différents. Il ne permet donc pas de réduire l'étude d'ordres linéaires définissables à l'étude de sous-ensembles définissables d'ordres lexicographiques.
- Ils ont aussi noté que ce sujet a des liens avec l'économie, que nous allons voir bientôt.

Anciens Résultats

- Steinhorn a un résultat non-publié qui implique le Théorème A dans le cas où $\dim(P) = 1$.
- Steinhorn et Onshuus ont récemment démontré qu'on peut répartir un ordre linéaire en un nombre fini de morceaux définissables, et pour chaque morceau, considéré comme ordre linéaire lui-même, le Théorème A est vrai.
- Pourtant, leur résultat ne dit pas comment l'ordre compare les éléments dans deux morceaux différents. Il ne permet donc pas de réduire l'étude d'ordres linéaires définissables à l'étude de sous-ensembles définissables d'ordres lexicographiques.
- Ils ont aussi noté que ce sujet a des liens avec l'économie, que nous allons voir bientôt.

Anciens Résultats

- Steinhorn a un résultat non-publié qui implique le Théorème A dans le cas où $\dim(P) = 1$.
- Steinhorn et Onshuus ont récemment démontré qu'on peut répartir un ordre linéaire en un nombre fini de morceaux définissables, et pour chaque morceau, considéré comme ordre linéaire lui-même, le Théorème A est vrai.
- Pourtant, leur résultat ne dit pas comment l'ordre compare les éléments dans deux morceaux différents. Il ne permet donc pas de réduire l'étude d'ordres linéaires définissables à l'étude de sous-ensembles définissables d'ordres lexicographiques.
- Ils ont aussi noté que ce sujet a des liens avec l'économie, que nous allons voir bientôt.

UEFA

Exemple

Soit $P = M^2$, avec l'ordre $\prec$ défini par $\langle x, y\rangle \prec \langle u, v\rangle$ ssi $x + y < u + v$ ou $x + y = u + v$ et $y < v$.

Cet exemple vient de la Ligue de Champions de l'UEFA. Pour une équipe, la première coordonnée est les buts marqués à domicile et la deuxième coordonnée est les buts marqués à l'extérieur. Une équipe l'emporte si elle marque plus de buts au total, ou dans le cas où les équipes marquent le même nombre de buts, si elle marque plus de buts à l'extérieur.

Le plongement:

Envoyez $\langle x, y\rangle$ sur $\langle x + y, y\rangle$.

UEFA

Exemple

Soit $P = M^2$, avec l'ordre $\prec$ défini par $\langle x, y\rangle \prec \langle u, v\rangle$ ssi $x + y < u + v$ ou $x + y = u + v$ et $y < v$.

Cet exemple vient de la Ligue de Champions de l'UEFA. Pour une équipe, la première coordonnée est les buts marqués à domicile et la deuxième coordonnée est les buts marqués à l'extérieur. Une équipe l'emporte si elle marque plus de buts au total, ou dans le cas où les équipes marquent le même nombre de buts, si elle marque plus de buts à l'extérieur.

Le plongement:

Envoyez $\langle x, y\rangle$ sur $\langle x + y, y\rangle$.

UEFA

Exemple

Soit $P = M^2$, avec l'ordre $\prec$ défini par $\langle x, y\rangle \prec \langle u, v\rangle$ ssi $x + y < u + v$ ou $x + y = u + v$ et $y < v$.

Cet exemple vient de la Ligue de Champions de l'UEFA. Pour une équipe, la première coordonnée est les buts marqués à domicile et la deuxième coordonnée est les buts marqués à l'extérieur. Une équipe l'emporte si elle marque plus de buts au total, ou dans le cas où les équipes marquent le même nombre de buts, si elle marque plus de buts à l'extérieur.

Le plongement:

Envoyez $\langle x, y\rangle$ sur $\langle x + y, y\rangle$.

Entrelacer

Exemple

Soit $P = (0,1) \cup (1,2)$, avec l'ordre $\prec$ qui coïncide avec $<$ sur $(0,1) \times (0,1)$ et $(1,2) \times (1,2)$, et qui est défini par $a \prec b$ ssi $a \leq b - 1$ sur $(0,1) \times (1,2)$.

$$0{,}25 \prec 0{,}5 \prec 1{,}5 \prec 0{,}75 \prec 1{,}8 \prec 1{,}9$$

Le plongement:

Envoyez $a \in (0,1)$ sur $\langle a, 0 \rangle$. Envoyez $b \in (1,2)$ sur $\langle b - 1, 1 \rangle$.

Entrelacer

Exemple

Soit $P = (0,1) \cup (1,2)$, avec l'ordre $\prec$ qui coïncide avec $<$ sur $(0,1) \times (0,1)$ et $(1,2) \times (1,2)$, et qui est défini par $a \prec b$ ssi $a \leq b - 1$ sur $(0,1) \times (1,2)$.

$$0{,}25 \prec 0{,}5 \prec 1{,}5 \prec 0{,}75 \prec 1{,}8 \prec 1{,}9$$

Le plongement:

Envoyez $a \in (0,1)$ sur $\langle a, 0 \rangle$. Envoyez $b \in (1,2)$ sur $\langle b-1, 1 \rangle$.

Pourquoi $n + 2$

Cet exemple montre pourquoi nous avons besoin d'ajouter une coordonnée – il est possible qu'il y ait un nombre fini de morceaux qui s'entrelacent. L'o-minimalité nous assure qu'il n'y en aura pas un nombre infini.

La première dimension n'est nécessaire que si nous n'avons pas un corps. Avec un corps, les morceaux finis peuvent être collés, et dimension $n + 1$ suffit.

Exemple

Soit $M = (\mathbb{R}, <, +)$ et soit $P = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$, avec l'ordre $\prec$ qui coïncide avec $<$ sur $(0, 1)$, $(1, 2)$, et $(2, \infty)$; avec la même méthode de comparaison entre $(0, 1)$ et $(1, 2)$; et $(2, \infty) \prec (0, 1)$.

Le plongement envoie un élément $a \in (0, 1)$ sur $\langle 1, a, 0 \rangle$, un élément $b \in (1, 2)$ sur $\langle 1, b - 1, 1 \rangle$, et $c \in (2, \infty)$ sur $\langle 0, c, 0 \rangle$.

Pourquoi $n + 2$

Cet exemple montre pourquoi nous avons besoin d'ajouter une coordonnée – il est possible qu'il y ait un nombre fini de morceaux qui s'entrelacent. L'o-minimalité nous assure qu'il n'y en aura pas un nombre infini.

La première dimension n'est nécessaire que si nous n'avons pas un corps. Avec un corps, les morceaux finis peuvent être collés, et dimension $n + 1$ suffit.

Exemple

Soit $M = (\mathbb{R}, <, +)$ et soit $P = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$, avec l'ordre $\prec$ qui coïncide avec $<$ sur $(0, 1)$, $(1, 2)$, et $(2, \infty)$; avec la même méthode de comparaison entre $(0, 1)$ et $(1, 2)$; et $(2, \infty) \prec (0, 1)$.

Le plongement envoie un élément $a \in (0, 1)$ sur $\langle 1, a, 0\rangle$, un élément $b \in (1, 2)$ sur $\langle 1, b - 1, 1\rangle$, et $c \in (2, \infty)$ sur $\langle 0, c, 0\rangle$.

Pourquoi $n+2$

Cet exemple montre pourquoi nous avons besoin d'ajouter une coordonnée – il est possible qu'il y ait un nombre fini de morceaux qui s'entrelacent. L'o-minimalité nous assure qu'il n'y en aura pas un nombre infini.

La première dimension n'est nécessaire que si nous n'avons pas un corps. Avec un corps, les morceaux finis peuvent être collés, et dimension $n+1$ suffit.

Exemple

Soit $M = (\mathbb{R}, <, +)$ et soit $P = (0,1) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$, avec l'ordre $\prec$ qui coïncide avec $<$ sur $(0,1)$, $(1,2)$, et $(2,\infty)$; avec la même méthode de comparaison entre $(0,1)$ et $(1,2)$; et $(2,\infty) \prec (0,1)$.

Le plongement envoie un élément $a \in (0,1)$ sur $\langle 1, a, 0 \rangle$, un élément $b \in (1,2)$ sur $\langle 1, b-1, 1 \rangle$, et $c \in (2,\infty)$ sur $\langle 0, c, 0 \rangle$.

Pourquoi $n + 2$

Cet exemple montre pourquoi nous avons besoin d'ajouter une coordonnée – il est possible qu'il y ait un nombre fini de morceaux qui s'entrelacent. L'o-minimalité nous assure qu'il n'y en aura pas un nombre infini.

La première dimension n'est nécessaire que si nous n'avons pas un corps. Avec un corps, les morceaux finis peuvent être collés, et dimension $n + 1$ suffit.

Exemple

Soit $M = (\mathbb{R}, <, +)$ et soit $P = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$, avec l'ordre $\prec$ qui coïncide avec $<$ sur $(0, 1)$, $(1, 2)$, et $(2, \infty)$; avec la même méthode de comparaison entre $(0, 1)$ et $(1, 2)$; et $(2, \infty) \prec (0, 1)$.

Le plongement envoie un élément $a \in (0, 1)$ sur $\langle 1, a, 0\rangle$, un élément $b \in (1, 2)$ sur $\langle 1, b - 1, 1\rangle$, et $c \in (2, \infty)$ sur $\langle 0, c, 0\rangle$.

Une dimension: "monotonicité" pour ordre

Lemme (Steinhorn, Onshuus et Steinhorn)

Soit $(P, \prec)$ un ordre linéaire M-définissable, $P \subseteq M$. Alors nous pouvons répartir P en un nombre fini de points et d'intervalles, tel que sur chaque intervalle, soit $\prec$ et $<$ coïncident, soit $\prec$ et $>$ coïncident.

Pour ce lemme, et partout dans la preuve, c'est très utile à noter que, si X est une famille définissable des ensembles, paramétriser par un ensemble A, nous pouvons répartir A tel que sur chaque morceau, la famille varie continûment.

Nous utilisons ce fait souvent avec la famille $\{y \in P \mid x \prec y\}_x$.

Une dimension: "monotonicité" pour ordre

Lemme (Steinhorn, Onshuus et Steinhorn)

Soit $(P, \prec)$ un ordre linéaire M-définissable, $P \subseteq M$. Alors nous pouvons répartir P en un nombre fini de points et d'intervalles, tel que sur chaque intervalle, soit $\prec$ et $<$ coïncident, soit $\prec$ et $>$ coïncident.

Pour ce lemme, et partout dans la preuve, c'est très utile à noter que, si X est une famille définissable des ensembles, paramétriser par un ensemble A, nous pouvons répartir A tel que sur chaque morceau, la famille varie continûment.

Nous utilisons ce fait souvent avec la famille $\{y \in P \mid x \prec y\}_x$.

Une dimension: "monotonicité" pour ordre

Lemme (Steinhorn, Onshuus et Steinhorn)

Soit $(P, \prec)$ un ordre linéaire M-définissable, $P \subseteq M$. Alors nous pouvons répartir P en un nombre fini de points et d'intervalles, tel que sur chaque intervalle, soit $\prec$ et $<$ coïncident, soit $\prec$ et $>$ coïncident.

Pour ce lemme, et partout dans la preuve, c'est très utile à noter que, si X est une famille définissable des ensembles, paramétriser par un ensemble A, nous pouvons répartir A tel que sur chaque morceau, la famille varie continûment.

Nous utilisons ce fait souvent avec la famille $\{y \in P \mid x \prec y\}_x$.

Une dimension: stratégie

- En utilisant le lemme de monotonicité et le fonction définissable qui renverse l'ordre, nous avons $P = I_1 \cup \ldots \cup I_k$, où chaque I_j est un point ou un intervalle, et $\prec$ et $<$ coïncident sur chaque I_j.
- Par récurrence, nous envoyons $I_1 \cup \ldots \cup I_{k-1}$ sur P', un sous-ensemble définissable de M^2, ordonnée lexicographiquement. Nous devons insérer I_k.
- Nous pouvons répartir I_k en morceaux qui se comportent bien, relativement à P', et les insérer, un par un, en gardant le comportement des morceaux qui restent, relativement à notre nouveau P'.

Une dimension: stratégie

- En utilisant le lemme de monotonicité et le fonction définissable qui renverse l'ordre, nous avons $P = I_1 \cup \ldots \cup I_k$, où chaque I_j est un point ou un intervalle, et $\prec$ et $<$ coïncident sur chaque I_j.
- Par récurrence, nous envoyons $I_1 \cup \ldots \cup I_{k-1}$ sur P', un sous-ensemble définissable de M^2, ordonnée lexicographiquement. Nous devons insérer I_k.
- Nous pouvons répartir I_k en morceaux qui se comportent bien, relativement à P', et les insérer, un par un, en gardant le comportement des morceaux qui restent, relativement à notre nouveau P'.

Une dimension: stratégie

- En utilisant le lemme de monotonicité et le fonction définissable qui renverse l'ordre, nous avons $P = I_1 \cup \ldots \cup I_k$, où chaque I_j est un point ou un intervalle, et $\prec$ et $<$ coïncident sur chaque I_j.
- Par récurrence, nous envoyons $I_1 \cup \ldots \cup I_{k-1}$ sur P', un sous-ensemble définissable de M^2, ordonnée lexicographiquement. Nous devons insérer I_k.
- Nous pouvons répartir I_k en morceaux qui se comportent bien, relativement à P', et les insérer, un par un, en gardant le comportement des morceaux qui restent, relativement à notre nouveau P'.

Répartir I_k

- Chaque point de I_k est dans une coupure de P'.
- Soit la coupure est juste après un élément de P', soit la coupure est juste avant un élément de P', soit la coupure est une coupure "dense".
- Nous voulons répartir I_k en morceaux, tels que pour chaque morceau, soit la coupure est la même pour tous les éléments, soit chaque élément est juste après un élément de P', soit chaque élément est juste avant un élément de P'.
- Il faut montrer que chaque coupure peut contenir soit un seul élément de I_k, soit un nombre infini d'éléments de I_k, et il n'y a qu'un nombre fini de coupures dans le deuxième cas.

Répartir I_k

- Chaque point de I_k est dans une coupure de P'.
- Soit la coupure est juste après un élément de P', soit la coupure est juste avant un élément de P', soit la coupure est une coupure "dense".
- Nous voulons répartir I_k en morceaux, tels que pour chaque morceau, soit la coupure est la même pour tous les éléments, soit chaque élément est juste après un élément de P', soit chaque élément est juste avant un élément de P'.
- Il faut montrer que chaque coupure peut contenir soit un seul élément de I_k, soit un nombre infini d'éléments de I_k, et il n'y a qu'un nombre fini de coupures dans le deuxième cas.

Répartir I_k

- Chaque point de I_k est dans une coupure de P'.
- Soit la coupure est juste après un élément de P', soit la coupure est juste avant un élément de P', soit la coupure est une coupure "dense".
- Nous voulons répartir I_k en morceaux, tels que pour chaque morceau, soit la coupure est la même pour tous les éléments, soit chaque élément est juste après un élément de P', soit chaque élément est juste avant un élément de P'.
- Il faut montrer que chaque coupure peut contenir soit un seul élément de I_k, soit un nombre infini d'éléments de I_k, et il n'y a qu'un nombre fini de coupures dans le deuxième cas.

Répartir I_k

- Chaque point de I_k est dans une coupure de P'.
- Soit la coupure est juste après un élément de P', soit la coupure est juste avant un élément de P', soit la coupure est une coupure "dense".
- Nous voulons répartir I_k en morceaux, tels que pour chaque morceau, soit la coupure est la même pour tous les éléments, soit chaque élément est juste après un élément de P', soit chaque élément est juste avant un élément de P'.
- Il faut montrer que chaque coupure peut contenir soit un seul élément de I_k, soit un nombre infini d'éléments de I_k, et il n'y a qu'un nombre fini de coupures dans le deuxième cas.

Dimension n: Deux compteurs

Définition

Pour $x \in P$, soit $\mathrm{pdim}(x) := \min\{\dim((y,z)_\prec) \mid x \in (y,z)_\prec\}$.

$\mathrm{pdim}(x)$ calcule la dimension de P dans un $\prec$-voisinage de x.

Définition

Pour $x, y \in P$, soit xEy ssi le $\prec$-intervalle borné par x et y a dimension $< n$.

E est une relation d'équivalence $\prec$-convexe sur P.

Dimension n: Deux compteurs

Définition

Pour $x \in P$, soit $\mathrm{pdim}(x) := \min\{\dim((y,z)_\prec) \mid x \in (y,z)_\prec\}$.

$\mathrm{pdim}(x)$ calcule la dimension de P dans un $\prec$-voisinage de x.

Définition

Pour $x, y \in P$, soit xEy ssi le $\prec$-intervalle borné par x et y a dimension $< n$.

E est une relation d'équivalence $\prec$-convexe sur P.

Dimension n: Deux compteurs

Définition

Pour $x \in P$, soit $\mathrm{pdim}(x) := \min\{\dim((y,z)_\prec) \mid x \in (y,z)_\prec\}$.

$\mathrm{pdim}(x)$ calcule la dimension de P dans un $\prec$-voisinage de x.

Définition

Pour $x, y \in P$, soit xEy ssi le $\prec$-intervalle borné par x et y a dimension $< n$.

E est une relation d'équivalence $\prec$-convexe sur P.

Dimension n: Deux compteurs

Définition

Pour $x \in P$, soit $\operatorname{pdim}(x) := \min\{\dim((y,z)_{\prec}) \mid x \in (y,z)_{\prec}\}$.

$\operatorname{pdim}(x)$ calcule la dimension de P dans un $\prec$-voisinage de x.

Définition

Pour $x, y \in P$, soit xEy ssi le $\prec$-intervalle borné par x et y a dimension $< n$.

E est une relation d'équivalence $\prec$-convexe sur P.

E-classes et pdim cellules

Lemme

Aucune E-classe n'a dimension n.

S'il y en avait, nous aurions un ensemble n-dimensionnel définissable $\prec$-convexe tel que n'importe quel $\prec$-intervalle qui est dedans cet ensemble a dimension $< n$. On peut montrer que ce n'est pas possible.

Soit $\mathcal{C}$ une décomposition cellulaire de P telle que sur chaque cellule dans $\mathcal{C}$, nous avons pdim constante.

E-classes et pdim cellules

Lemme

Aucune E-classe n'a dimension n.

S'il y en avait, nous aurions un ensemble n-dimensionnel définissable $\prec$-convexe tel que n'importe quel $\prec$-intervalle qui est dedans cet ensemble a dimension $< n$. On peut montrer que ce n'est pas possible.

Soit $\mathcal{C}$ une décomposition cellulaire de P telle que sur chaque cellule dans $\mathcal{C}$, nous avons pdim constante.

E-classes et pdim cellules

Lemme

Aucune E-classe n'a dimension n.

S'il y en avait, nous aurions un ensemble n-dimensionnel définissable $\prec$-convexe tel que n'importe quel $\prec$-intervalle qui est dedans cet ensemble a dimension $< n$. On peut montrer que ce n'est pas possible.

Soit $\mathcal{C}$ une décomposition cellulaire de P telle que sur chaque cellule dans $\mathcal{C}$, nous avons pdim constante.

Possibilité de récurrence

Lemme

Si tout cellule ouverte dans $\mathcal{C}$ a $\text{pdim} < n$, alors le Théorème A est vrai pour P.

- La prémisse implique que $\dim(P/E) < n$.
- Par récurrence, P/E se plonge définissablement dans un ordre lexicographique. Aussi par récurrence, pour chaque $x \in P/E$, la classe $[x]_E$ se plonge définissablement dans un ordre lexicographique.
- Nous collons soigneusement les morceaux, en faisant attention aux dimensions, et nous démontrons le théorème.

Possibilité de récurrence

Lemme

Si tout cellule ouverte dans $\mathcal{C}$ a pdim $< n$*, alors le Théorème A est vrai pour P.*

- La prémisse implique que $\dim(P/E) < n$.
- Par récurrence, P/E se plonge définissablement dans un ordre lexicographique. Aussi par récurrence, pour chaque $x \in P/E$, la classe $[x]_E$ se plonge définissablement dans un ordre lexicographique.
- Nous collons soigneusement les morceaux, en faisant attention aux dimensions, et nous démontrons le théorème.

Possibilité de récurrence

Lemme

Si tout cellule ouverte dans $\mathcal{C}$ a pdim $< n$*, alors le Théorème A est vrai pour P.*

- La prémisse implique que $\dim(P/E) < n$.
- Par récurrence, P/E se plonge définissablement dans un ordre lexicographique. Aussi par récurrence, pour chaque $x \in P/E$, la classe $[x]_E$ se plonge définissablement dans un ordre lexicographique.
- Nous collons soigneusement les morceaux, en faisant attention aux dimensions, et nous démontrons le théorème.

Possibilité de récurrence

Lemme

Si tout cellule ouverte dans $\mathcal{C}$ a pdim $< n$*, alors le Théorème A est vrai pour* P.

- La prémisse implique que $\dim(P/E) < n$.
- Par récurrence, P/E se plonge définissablement dans un ordre lexicographique. Aussi par récurrence, pour chaque $x \in P/E$, la classe $[x]_E$ se plonge définissablement dans un ordre lexicographique.
- Nous collons soigneusement les morceaux, en faisant attention aux dimensions, et nous démontrons le théorème.

Sinon

Nous savons qu'il existe une cellule ouverte, C, avec pdim $= n$ sur C.
Nous pouvons supposer, après un raffinement, que pour chaque $x \in C$ et chaque $y \prec x$, $\dim((y, x)_\prec) = n$.

Lemme

$n \leq 1$.

Nous suivons une technique due à Hasson et Onshuus, et choisissons Γ, une courbe définissable dans C. Quitte à restreindre/réparamétriser Γ, nous pouvons supposer que "$<$" et $\prec$ coïncident sur Γ.

Sinon

Nous savons qu'il existe une cellule ouverte, C, avec pdim $= n$ sur C. Nous pouvons supposer, après un raffinement, que pour chaque $x \in C$ et chaque $y \prec x$, $\dim((y,x)_\prec) = n$.

Lemme

$n \leq 1$.

Nous suivons une technique due à Hasson et Onshuus, et choisissons Γ, une courbe définissable dans C. Quitte à restreindre/réparamétriser Γ, nous pouvons supposer que "$<$" et $\prec$ coïncident sur Γ.

Sinon

Nous savons qu'il existe une cellule ouverte, C, avec pdim $= n$ sur C. Nous pouvons supposer, après un raffinement, que pour chaque $x \in C$ et chaque $y \prec x$, $\dim((y, x)_{\prec}) = n$.

Lemme

$n \leq 1$.

Nous suivons une technique due à Hasson et Onshuus, et choisissons Γ, une courbe définissable dans C. Quitte à restreindre/réparamétriser Γ, nous pouvons supposer que "$<$" et $\prec$ coïncident sur Γ.

Sinon

Nous savons qu'il existe une cellule ouverte, C, avec pdim $= n$ sur C. Nous pouvons supposer, après un raffinement, que pour chaque $x \in C$ et chaque $y \prec x$, $\dim((y, x)_{\prec}) = n$.

Lemme

$n \leq 1$.

Nous suivons une technique due à Hasson et Onshuus, et choisissons Γ, une courbe définissable dans C. Quitte à restreindre/réparamétriser Γ, nous pouvons supposer que "$<$" et $\prec$ coïncident sur Γ.

Fibres

- Soit $T : P \to \Gamma$ une fonction partielle, définie par $T(x) := \inf_{\prec}\{y \in \Gamma \mid y \succeq x\}$.
- $T(x)$ est l'élément le plus petit dans Γ parmi eux qui sont minorés par x.
- Par des arguments sur les fibres, l'ensemble $T^{-1}(y)$ a dimension $< n$ pour tous sauf un nombre fini d'éléments de Γ, et nous pouvons nous restreindre à un morceau de Γ ou $k = \dim(T^{-1}(y))$ est constante.
- Soit $b \prec c$ des éléments de ce morceau de Γ.
- Encore en regardant les fibres, nous voyons que $n = \dim((b, c)_{\prec}) \leq 1 + k$.
- Nous voulons montrer que $k = 0$.

Fibres

- Soit $T : P \to \Gamma$ une fonction partielle, définie par $T(x) := \inf_{\prec}\{y \in \Gamma \mid y \succeq x\}$.
- $T(x)$ est l'élément le plus petit dans Γ parmi eux qui sont minorés par x.
- Par des arguments sur les fibres, l'ensemble $T^{-1}(y)$ a dimension $< n$ pour tous sauf un nombre fini d'éléments de Γ, et nous pouvons nous restreindre à un morceau de Γ ou $k = \dim(T^{-1}(y))$ est constante.
- Soit $b \prec c$ des éléments de ce morceau de Γ.
- Encore en regardant les fibres, nous voyons que $n = \dim((b, c)_{\prec}) \leq 1 + k$.
- Nous voulons montrer que $k = 0$.

Fibres

- Soit $T : P \to \Gamma$ une fonction partielle, définie par $T(x) := \inf_{\prec}\{y \in \Gamma \mid y \succeq x\}$.
- $T(x)$ est l'élément le plus petit dans Γ parmi eux qui sont minorés par x.
- Par des arguments sur les fibres, l'ensemble $T^{-1}(y)$ a dimension $< n$ pour tous sauf un nombre fini d'éléments de Γ, et nous pouvons nous restreindre à un morceau de Γ ou $k = \dim(T^{-1}(y))$ est constante.
- Soit $b \prec c$ des éléments de ce morceau de Γ.
- Encore en regardant les fibres, nous voyons que $n = \dim((b, c)_{\prec}) \leq 1 + k$.
- Nous voulons montrer que $k = 0$.

Fibres

- Soit $T : P \to \Gamma$ une fonction partielle, définie par $T(x) := \inf_{\prec}\{y \in \Gamma \mid y \succeq x\}$.
- $T(x)$ est l'élément le plus petit dans Γ parmi eux qui sont minorés par x.
- Par des arguments sur les fibres, l'ensemble $T^{-1}(y)$ a dimension $< n$ pour tous sauf un nombre fini d'éléments de Γ, et nous pouvons nous restreindre à un morceau de Γ ou $k = \dim(T^{-1}(y))$ est constante.
- Soit $b \prec c$ des éléments de ce morceau de Γ.
- Encore en regardant les fibres, nous voyons que $n = \dim((b, c)_{\prec}) \leq 1 + k$.
- Nous voulons montrer que $k = 0$.

Fibres

- Soit $T : P \to \Gamma$ une fonction partielle, définie par $T(x) := \inf_{\prec}\{y \in \Gamma \mid y \succeq x\}$.
- $T(x)$ est l'élément le plus petit dans Γ parmi eux qui sont minorés par x.
- Par des arguments sur les fibres, l'ensemble $T^{-1}(y)$ a dimension $< n$ pour tous sauf un nombre fini d'éléments de Γ, et nous pouvons nous restreindre à un morceau de Γ ou $k = \dim(T^{-1}(y))$ est constante.
- Soit $b \prec c$ des éléments de ce morceau de Γ.
- Encore en regardant les fibres, nous voyons que $n = \dim((b, c)_{\prec}) \leq 1 + k$.
- Nous voulons montrer que $k = 0$.

Fibres

- Soit $T : P \to \Gamma$ une fonction partielle, définie par $T(x) := \inf_{\prec}\{y \in \Gamma \mid y \succeq x\}$.
- $T(x)$ est l'élément le plus petit dans Γ parmi eux qui sont minorés par x.
- Par des arguments sur les fibres, l'ensemble $T^{-1}(y)$ a dimension $< n$ pour tous sauf un nombre fini d'éléments de Γ, et nous pouvons nous restreindre à un morceau de Γ ou $k = \dim(T^{-1}(y))$ est constante.
- Soit $b \prec c$ des éléments de ce morceau de Γ.
- Encore en regardant les fibres, nous voyons que $n = \dim((b, c)_{\prec}) \leq 1 + k$.
- Nous voulons montrer que $k = 0$.

L'heure de pdim

- Soit $a \in (b, c)_\prec \cap \Gamma$, et supposons que $k > 0$. Alors, nous pouvons choisir $d \in T^{-1}(a)$.
- Nous notons bien que $(d, a)_\prec \subseteq T^{-1}(a)$. Alors $\dim((d, a)_\prec) \leq \dim(T^{-1}(a)) \leq k < n$. Mais $a \in C$, et donc $\dim((y, a)_\prec) < n$ pour tout y, contradiction.
- Alors $k = 0$, donc $\dim(P) = n \leq 1 + 0$.

L'heure de pdim

- Soit $a \in (b, c)_{\prec} \cap \Gamma$, et supposons que $k > 0$. Alors, nous pouvons choisir $d \in T^{-1}(a)$.
- Nous notons bien que $(d, a)_{\prec} \subseteq T^{-1}(a)$. Alors $\dim((d, a)_{\prec}) \leq \dim(T^{-1}(a)) \leq k < n$. Mais $a \in C$, et donc $\dim((y, a)_{\prec}) < n$ pour tout y, contradiction.
- Alors $k = 0$, donc $\dim(P) = n \leq 1 + 0$.

L'heure de pdim

- Soit $a \in (b, c)_\prec \cap \Gamma$, et supposons que $k > 0$. Alors, nous pouvons choisir $d \in T^{-1}(a)$.
- Nous notons bien que $(d, a)_\prec \subseteq T^{-1}(a)$. Alors $\dim((d, a)_\prec) \leq \dim(T^{-1}(a)) \leq k < n$. Mais $a \in C$, et donc $\dim((y, a)_\prec) < n$ pour tout y, contradiction.
- Alors $k = 0$, donc $\dim(P) = n \leq 1 + 0$.

Résultats en Économie

- Les liens avec l'économie sont très forts.
- Un article par Beardon et al (2002), "Lexicographic decomposition of chains and the concept of a planar chain" dans le **Journal of Mathematical Economics** contient une idée très proche d'une idée centrale de ma preuve.
- Quand un ordre linéaire a un sous-ordre qui est cofinal, coïnitial, et Dedekind complet, on peut décomposer l'ordre avec une relation d'équivalence.
- Après plusieurs répétitions, on démontre l'existence d'un plongement d'un morceau de l'ordre dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.
- La procédure est vraiment non-définissable, et il n'est pas clair comment décider si un ordre a un tel sous-ordre.
- Ils ne s'intéressent qu'aux plongements dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.

Résultats en Économie

- Les liens avec l'économie sont très forts.
- Un article par Beardon et al (2002), "Lexicographic decomposition of chains and the concept of a planar chain" dans le **Journal of Mathematical Economics** contient une idée très proche d'une idée centrale de ma preuve.
- Quand un ordre linéaire a un sous-ordre qui est cofinal, coïnitial, et Dedekind complet, on peut décomposer l'ordre avec une relation d'équivalence.
- Après plusieurs répétitions, on démontre l'existence d'un plongement d'un morceau de l'ordre dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.
- La procédure est vraiment non-définissable, et il n'est pas clair comment décider si un ordre a un tel sous-ordre.
- Ils ne s'intéressent qu'aux plongements dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.

Résultats en Économie

- Les liens avec l'économie sont très forts.
- Un article par Beardon et al (2002), "Lexicographic decomposition of chains and the concept of a planar chain" dans le **Journal of Mathematical Economics** contient une idée très proche d'une idée centrale de ma preuve.
- Quand un ordre linéaire a un sous-ordre qui est cofinal, coïnitial, et Dedekind complet, on peut décomposer l'ordre avec une relation d'équivalence.
- Après plusieurs répétitions, on démontre l'existence d'un plongement d'un morceau de l'ordre dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.
- La procédure est vraiment non-définissable, et il n'est pas clair comment décider si un ordre a un tel sous-ordre.
- Ils ne s'intéressent qu'aux plongements dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.

Résultats en Économie

- Les liens avec l'économie sont très forts.
- Un article par Beardon et al (2002), "Lexicographic decomposition of chains and the concept of a planar chain" dans le **Journal of Mathematical Economics** contient une idée très proche d'une idée centrale de ma preuve.
- Quand un ordre linéaire a un sous-ordre qui est cofinal, coïnitial, et Dedekind complet, on peut décomposer l'ordre avec une relation d'équivalence.
- Après plusieurs répétitions, on démontre l'existence d'un plongement d'un morceau de l'ordre dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.
- La procédure est vraiment non-définissable, et il n'est pas clair comment décider si un ordre a un tel sous-ordre.
- Ils ne s'intéressent qu'aux plongements dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.

Résultats en Économie

- Les liens avec l'économie sont très forts.
- Un article par Beardon et al (2002), "Lexicographic decomposition of chains and the concept of a planar chain" dans le **Journal of Mathematical Economics** contient une idée très proche d'une idée centrale de ma preuve.
- Quand un ordre linéaire a un sous-ordre qui est cofinal, coïnitial, et Dedekind complet, on peut décomposer l'ordre avec une relation d'équivalence.
- Après plusieurs répétitions, on démontre l'existence d'un plongement d'un morceau de l'ordre dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.
- La procédure est vraiment non-définissable, et il n'est pas clair comment décider si un ordre a un tel sous-ordre.
- Ils ne s'intéressent qu'aux plongements dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.

Résultats en Économie

- Les liens avec l'économie sont très forts.
- Un article par Beardon et al (2002), "Lexicographic decomposition of chains and the concept of a planar chain" dans le **Journal of Mathematical Economics** contient une idée très proche d'une idée centrale de ma preuve.
- Quand un ordre linéaire a un sous-ordre qui est cofinal, coïnitial, et Dedekind complet, on peut décomposer l'ordre avec une relation d'équivalence.
- Après plusieurs répétitions, on démontre l'existence d'un plongement d'un morceau de l'ordre dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.
- La procédure est vraiment non-définissable, et il n'est pas clair comment décider si un ordre a un tel sous-ordre.
- Ils ne s'intéressent qu'aux plongements dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$.

Pourquoi l'Économie?

- Les économistes s'intéressent aux préférences des gens. On imagine qu'une personne peut choisir entre deux "paniers" des produits, et qu'elle a toujours une préférence d'un parmi les deux.
- Ils appellent la totalité de ces préférences (parmi tous les paniers possibles) une "relation de préférence", et normalement elle est vraiment un ordre.
- Les économistes s'interéssent aussi à l'argent. Donc, ils essaient toujours de lier les préférences à l'argent.
- Ils le font par un plongement de l'ordre de la relation de préférence dans $\mathbb{R}^1$.
- Ils appellent un tel plongement une "fonction d'utilité".

Pourquoi l'Économie?

- Les économistes s'intéressent aux préférences des gens. On imagine qu'une personne peut choisir entre deux "paniers" des produits, et qu'elle a toujours une préférence d'un parmi les deux.
- Ils appellent la totalité de ces préférences (parmi tous les paniers possibles) une "relation de préférence", et normalement elle est vraiment un ordre.
- Les économistes s'interéssent aussi à l'argent. Donc, ils essaient toujours de lier les préférences à l'argent.
- Ils le font par un plongement de l'ordre de la relation de préférence dans $\mathbb{R}^1$.
- Ils appellent un tel plongement une "fonction d'utilité".

Pourquoi l'Économie?

- Les économistes s'intéressent aux préférences des gens. On imagine qu'une personne peut choisir entre deux "paniers" des produits, et qu'elle a toujours une préférence d'un parmi les deux.
- Ils appellent la totalité de ces préférences (parmi tous les paniers possibles) une "relation de préférence", et normalement elle est vraiment un ordre.
- Les économistes s'interéssent aussi à l'argent. Donc, ils essaient toujours de lier les préférences à l'argent.
- Ils le font par un plongement de l'ordre de la relation de préférence dans $\mathbb{R}^1$.
- Ils appellent un tel plongement une "fonction d'utilité".

Pourquoi l'Économie?

- Les économistes s'intéressent aux préférences des gens. On imagine qu'une personne peut choisir entre deux “paniers” des produits, et qu'elle a toujours une préférence d'un parmi les deux.
- Ils appellent la totalité de ces préférences (parmi tous les paniers possibles) une “relation de préférence”, et normalement elle est vraiment un ordre.
- Les économistes s'interéssent aussi à l'argent. Donc, ils essaient toujours de lier les préférences à l'argent.
- Ils le font par un plongement de l'ordre de la relation de préférence dans $\mathbb{R}^1$.
- Ils appellent un tel plongement une “fonction d'utilité”.

Pourquoi l'Économie?

- Les économistes s'intéressent aux préférences des gens. On imagine qu'une personne peut choisir entre deux "paniers" des produits, et qu'elle a toujours une préférence d'un parmi les deux.
- Ils appellent la totalité de ces préférences (parmi tous les paniers possibles) une "relation de préférence", et normalement elle est vraiment un ordre.
- Les économistes s'interéssent aussi à l'argent. Donc, ils essaient toujours de lier les préférences à l'argent.
- Ils le font par un plongement de l'ordre de la relation de préférence dans $\mathbb{R}^1$.
- Ils appellent un tel plongement une "fonction d'utilité".

L'absence d'utilité

- Depuis longtemps, les économistes ont pensé que tous les ordres peuvent se plonger dans $\mathbb{R}$, mais en 1954, Dubreu a démontré que l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$ ne se plonge pas dans $\mathbb{R}$. Un tel ordre, qui ne se plonge pas dans $\mathbb{R}$, s'appelle "non-représentable".
- Récemment, l'étude des ordres non-représentables est devenue plus intéressante pour les économistes.
- Par exemple, on peut examiner la pollution. Si on n'a pas d'argent, la pollution n'est pas perçue comme un problème grave – le progrès de l'économie est plus important. Bien sûr, si on peut réduire la pollution sans faire mal à l'économie, tant mieux.
- Mais, quand on a assez pour vivre, on peut commencer à penser à la pollution, et peut-être qu'on est même prêt à perdre un peu de richesse pour améliorer l'environnement.

L'absence d'utilité

- Depuis longtemps, les économistes ont pensé que tous les ordres peuvent se plonger dans $\mathbb{R}$, mais en 1954, Dubreu a démontré que l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$ ne se plonge pas dans $\mathbb{R}$. Un tel ordre, qui ne se plonge pas dans $\mathbb{R}$, s'appelle "non-représentable".
- Récemment, l'étude des ordres non-représentables est devenue plus intéressante pour les économistes.
- Par exemple, on peut examiner la pollution. Si on n'a pas d'argent, la pollution n'est pas perçue comme un problème grave – le progrès de l'économie est plus important. Bien sûr, si on peut réduire la pollution sans faire mal à l'économie, tant mieux.
- Mais, quand on a assez pour vivre, on peut commencer à penser à la pollution, et peut-être qu'on est même prêt à perdre un peu de richesse pour améliorer l'environnement.

L'absence d'utilité

- Depuis longtemps, les économistes ont pensé que tous les ordres peuvent se plonger dans $\mathbb{R}$, mais en 1954, Dubreu a démontré que l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$ ne se plonge pas dans $\mathbb{R}$. Un tel ordre, qui ne se plonge pas dans $\mathbb{R}$, s'appelle "non-représentable".
- Récemment, l'étude des ordres non-représentables est devenue plus intéressante pour les économistes.
- Par exemple, on peut examiner la pollution. Si on n'a pas d'argent, la pollution n'est pas perçue comme un problème grave – le progrès de l'économie est plus important. Bien sûr, si on peut réduire la pollution sans faire mal à l'économie, tant mieux.
- Mais, quand on a assez pour vivre, on peut commencer à penser à la pollution, et peut-être qu'on est même prêt à perdre un peu de richesse pour améliorer l'environnement.

L'absence d'utilité

- Depuis longtemps, les économistes ont pensé que tous les ordres peuvent se plonger dans $\mathbb{R}$, mais en 1954, Dubreu a démontré que l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$ ne se plonge pas dans $\mathbb{R}$. Un tel ordre, qui ne se plonge pas dans $\mathbb{R}$, s'appelle "non-représentable".
- Récemment, l'étude des ordres non-représentables est devenue plus intéressante pour les économistes.
- Par exemple, on peut examiner la pollution. Si on n'a pas d'argent, la pollution n'est pas perçue comme un problème grave – le progrès de l'économie est plus important. Bien sûr, si on peut réduire la pollution sans faire mal à l'économie, tant mieux.
- Mais, quand on a assez pour vivre, on peut commencer à penser à la pollution, et peut-être qu'on est même prêt à perdre un peu de richesse pour améliorer l'environnement.

Les types d'ordres

- Cette relation est clairement liée aux ordres lexicographiques. Et en fait, car les économistes étudient souvent des ordres qui existent naturellement dans une structure o-minimale, beaucoup de leurs ordres peuvent être analysés par le Théorème A.
- L'analyse de Beardon et al m'intéresse beaucoup, peut-être est-elle aussi intéressante pour les théoriciens des ensembles.
- Ils montrent que, si un ordre n'est pas représentable, il doit avoir une de ces quatre formes:
  1. un morceau non-représentable de l'ordre se plonge dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$;
  2. un morceau est isomorphe à ω_1 ou ω_1^*;
  3. un morceau est un "ordre Aronszajn" (il ne contient pas ni ω_1 ni ω_1^*, et il ne contient aucun sous-ordre représentable non-dénombrable);
  4. un morceau est un "ordre Souslin" (n'importe quelle famille d'intervalles disjoints est dénombrable, et il contient un sous-ordre non-représentable qui possède un nombre dénombrable de "sauts").

Les types d'ordres

- Cette relation est clairement liée aux ordres lexicographiques. Et en fait, car les économistes étudient souvent des ordres qui existent naturellement dans une structure o-minimale, beaucoup de leurs ordres peuvent être analysés par le Théorème A.
- L'analyse de Beardon et al m'intéresse beaucoup, peut-être est-elle aussi intéressante pour les théoriciens des ensembles.
- Ils montrent que, si un ordre n'est pas représentable, il doit avoir une de ces quatre formes:
  1. un morceau non-représentable de l'ordre se plonge dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$;
  2. un morceau est isomorphe à ω_1 ou ω_1^*;
  3. un morceau est un "ordre Aronszajn" (il ne contient pas ni ω_1 ni ω_1^*, et il ne contient aucun sous-ordre représentable non-dénombrable);
  4. un morceau est un "ordre Souslin" (n'importe quelle famille d'intervalles disjoints est dénombrable, et il contient un sous-ordre non-représentable qui possède un nombre dénombrable de "sauts").

Les types d'ordres

- Cette relation est clairement liée aux ordres lexicographiques. Et en fait, car les économistes étudient souvent des ordres qui existent naturellement dans une structure o-minimale, beaucoup de leurs ordres peuvent être analysés par le Théorème A.
- L'analyse de Beardon et al m'intéresse beaucoup, peut-être est-elle aussi intéressante pour les théoriciens des ensembles.
- Ils montrent que, si un ordre n'est pas représentable, il doit avoir une de ces quatre formes:
  1. un morceau non-représentable de l'ordre se plonge dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$;
  2. un morceau est isomorphe à ω_1 ou ω_1^*;
  3. un morceau est un "ordre Aronszajn" (il ne contient pas ni ω_1 ni ω_1^*, et il ne contient aucun sous-ordre représentable non-dénombrable);
  4. un morceau est un "ordre Souslin" (n'importe quelle famille d'intervalles disjoints est dénombrable, et il contient un sous-ordre non-représentable qui possède un nombre dénombrable de "sauts").

Les types d'ordres

- Cette relation est clairement liée aux ordres lexicographiques. Et en fait, car les économistes étudient souvent des ordres qui existent naturellement dans une structure o-minimale, beaucoup de leurs ordres peuvent être analysés par le Théorème A.
- L'analyse de Beardon et al m'intéresse beaucoup, peut-être est-elle aussi intéressante pour les théoriciens des ensembles.
- Ils montrent que, si un ordre n'est pas représentable, il doit avoir une de ces quatre formes:
  1. un morceau non-représentable de l'ordre se plonge dans $(\mathbb{R}^2, <_{\mathrm{lex}})$;
  2. un morceau est isomorphe à ω_1 ou ω_1^*;
  3. un morceau est un "ordre Aronszajn" (il ne contient pas ni ω_1 ni ω_1^*, et il ne contient aucun sous-ordre représentable non-dénombrable);
  4. un morceau est un "ordre Souslin" (n'importe quelle famille d'intervalles disjoints est dénombrable, et il contient un sous-ordre non-représentable qui possède un nombre dénombrable de "sauts").

Les types d'ordres

- Cette relation est clairement liée aux ordres lexicographiques. Et en fait, car les économistes étudient souvent des ordres qui existent naturellement dans une structure o-minimale, beaucoup de leurs ordres peuvent être analysés par le Théorème A.
- L'analyse de Beardon et al m'intéresse beaucoup, peut-être est-elle aussi intéressante pour les théoriciens des ensembles.
- Ils montrent que, si un ordre n'est pas représentable, il doit avoir une de ces quatre formes:
  1. un morceau non-représentable de l'ordre se plonge dans $(\mathbb{R}^2, <_{\mathrm{lex}})$;
  2. un morceau est isomorphe à ω_1 ou ω_1^*;
  3. un morceau est un "ordre Aronszajn" (il ne contient pas ni ω_1 ni ω_1^*, et il ne contient aucun sous-ordre représentable non-dénombrable);
  4. un morceau est un "ordre Souslin" (n'importe quelle famille d'intervalles disjoints est dénombrable, et il contient un sous-ordre non-représentable qui possède un nombre dénombrable de "sauts").

Les types d'ordres

- Cette relation est clairement liée aux ordres lexicographiques. Et en fait, car les économistes étudient souvent des ordres qui existent naturellement dans une structure o-minimale, beaucoup de leurs ordres peuvent être analysés par le Théorème A.
- L'analyse de Beardon et al m'intéresse beaucoup, peut-être est-elle aussi intéressante pour les théoriciens des ensembles.
- Ils montrent que, si un ordre n'est pas représentable, il doit avoir une de ces quatre formes:
  1. un morceau non-représentable de l'ordre se plonge dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$;
  2. un morceau est isomorphe à ω_1 ou ω_1^*;
  3. un morceau est un "ordre Aronszajn" (il ne contient pas ni ω_1 ni ω_1^*, et il ne contient aucun sous-ordre représentable non-dénombrable);
  4. un morceau est un "ordre Souslin" (n'importe quelle famille d'intervalles disjoints est dénombrable, et il contient un sous-ordre non-représentable qui possède un nombre dénombrable de "sauts").

Les types d'ordres

- Cette relation est clairement liée aux ordres lexicographiques. Et en fait, car les économistes étudient souvent des ordres qui existent naturellement dans une structure o-minimale, beaucoup de leurs ordres peuvent être analysés par le Théorème A.
- L'analyse de Beardon et al m'intéresse beaucoup, peut-être est-elle aussi intéressante pour les théoriciens des ensembles.
- Ils montrent que, si un ordre n'est pas représentable, il doit avoir une de ces quatre formes:
  1. un morceau non-représentable de l'ordre se plonge dans $(\mathbb{R}^2, <_{\text{lex}})$;
  2. un morceau est isomorphe à ω_1 ou ω_1^*;
  3. un morceau est un "ordre Aronszajn" (il ne contient pas ni ω_1 ni ω_1^*, et il ne contient aucun sous-ordre représentable non-dénombrable);
  4. un morceau est un "ordre Souslin" (n'importe quelle famille d'intervalles disjoints est dénombrable, et il contient un sous-ordre non-représentable qui possède un nombre dénombrable de "sauts").

Ordres Partiels

- On se demande s'il existe une classification pour les ordres partiels, comme celle-ci que nous avons donné pour les ordres totaux.
- Clairement, c'est beaucoup plus difficile. Par exemple, n'importe quelle famille définissable d'ensembles est un ordre partiel, avec la relation d'inclusion.
- Néanmoins, nous pouvons demander:

Question

Soit M un groupe o-minimal, et soit $(P, \prec)$ un ordre partiel définissable. Est-ce qu'il existe un ordre total définissable, $(P, \prec')$, tel que $\prec'$ est une extension de $\prec$?

Ordres Partiels

- On se demande s'il existe une classification pour les ordres partiels, comme celle-ci que nous avons donné pour les ordres totaux.
- Clairement, c'est beaucoup plus difficile. Par exemple, n'importe quelle famille définissable d'ensembles est un ordre partiel, avec la relation d'inclusion.
- Néanmoins, nous pouvons demander:

Question

Soit M un groupe o-minimal, et soit $(P, \prec)$ un ordre partiel définissable. Est-ce qu'il existe un ordre total définissable, $(P, \prec')$, tel que $\prec'$ est une extension de $\prec$?

Ordres Partiels

- On se demande s'il existe une classification pour les ordres partiels, comme celle-ci que nous avons donné pour les ordres totaux.
- Clairement, c'est beaucoup plus difficile. Par exemple, n'importe quelle famille définissable d'ensembles est un ordre partiel, avec la relation d'inclusion.
- Néanmoins, nous pouvons demander:

Question

Soit M un groupe o-minimal, et soit $(P, \prec)$ un ordre partiel définissable. Est-ce qu'il existe un ordre total définissable, $(P, \prec')$, tel que $\prec'$ est une extension de $\prec$?

La vraie théorie des modèles

- Hasson et Onshuus ont démontré que n'importe quel ordre partiel contient un ordre total, qui est définissable juste dans la structure de l'ordre partiel.
- Malheureusement, leur preuve est très "locale" et ne marche pas pour cette question.
- Une question peut-être plus simple: est-ce qu'il existe une extension de $\prec$ qui est un ordre total et qui garde l'o-minimalité?
- Cette question est liée à un résultat de Chernikov: Soit M une structure NIP. Alors il est possible d'ajouter un ordre total à un morceau de M en gardant la propriété NIP.
- Et ce théorème est liée à une question très frustrante: Pour une structure M qui est NIP et instable, peut-on interpréter un ordre dans M?

La vraie théorie des modèles

- Hasson et Onshuus ont démontré que n'importe quel ordre partiel contient un ordre total, qui est définissable juste dans la structure de l'ordre partiel.
- Malheureusement, leur preuve est très "locale" et ne marche pas pour cette question.
- Une question peut-être plus simple: est-ce qu'il existe une extension de $\prec$ qui est un ordre total et qui garde l'o-minimalité?
- Cette question est liée à un résultat de Chernikov: Soit M une structure NIP. Alors il est possible d'ajouter un ordre total à un morceau de M en gardant la propriété NIP.
- Et ce théorème est liée à une question très frustrante: Pour une structure M qui est NIP et instable, peut-on interpréter un ordre dans M?

La vraie théorie des modèles

- Hasson et Onshuus ont démontré que n'importe quel ordre partiel contient un ordre total, qui est définissable juste dans la structure de l'ordre partiel.
- Malheureusement, leur preuve est très "locale" et ne marche pas pour cette question.
- Une question peut-être plus simple: est-ce qu'il existe une extension de $\prec$ qui est un ordre total et qui garde l'o-minimalité?
- Cette question est liée à un résultat de Chernikov: Soit M une structure NIP. Alors il est possible d'ajouter un ordre total à un morceau de M en gardant la propriété NIP.
- Et ce théorème est liée à une question très frustrante: Pour une structure M qui est NIP et instable, peut-on interpréter un ordre dans M?

La vraie théorie des modèles

- Hasson et Onshuus ont démontré que n'importe quel ordre partiel contient un ordre total, qui est définissable juste dans la structure de l'ordre partiel.
- Malheureusement, leur preuve est très “locale” et ne marche pas pour cette question.
- Une question peut-être plus simple: est-ce qu'il existe une extension de $\prec$ qui est un ordre total et qui garde l'o-minimalité?
- Cette question est liée à un résultat de Chernikov: Soit M une structure NIP. Alors il est possible d'ajouter un ordre total à un morceau de M en gardant la propriété NIP.
- Et ce théorème est liée à une question très frustrante: Pour une structure M qui est NIP et instable, peut-on interpréter un ordre dans M?

La vraie théorie des modèles

- Hasson et Onshuus ont démontré que n'importe quel ordre partiel contient un ordre total, qui est définissable juste dans la structure de l'ordre partiel.
- Malheureusement, leur preuve est très "locale" et ne marche pas pour cette question.
- Une question peut-être plus simple: est-ce qu'il existe une extension de $\prec$ qui est un ordre total et qui garde l'o-minimalité?
- Cette question est liée à un résultat de Chernikov: Soit M une structure NIP. Alors il est possible d'ajouter un ordre total à un morceau de M en gardant la propriété NIP.
- Et ce théorème est liée à une question très frustrante: Pour une structure M qui est NIP et instable, peut-on interpréter un ordre dans M?